



DERS BİLGİ FORMU

FAKÜLTE / ENSTİTÜ ADI	Fen Edebiyat Fakültesi
BÖLÜM / PROGRAM / ANABİLİM DALI ADI	Matematik
DERSİN ADI	Normlu Uzaylarda Sayısal Bölgeler
DERSİN KODU	MAT4350
YEREL KREDİSİ	3
AKTS KREDİSİ	5
HAFTALIK DERS SAATİ	3
HAFTALIK UYGULAMA SAATİ	0
HAFTALIK LABORATUVAR SAATİ	0
ÖNKOŞULLAR	Yok
YARIYIL	Güz, Bahar
DERSİN DİLİ	İngilizce, Türkçe
DERSİN SEVİYESİ	Lisans
DERSİN TÜRÜ	Seçmeli @Matematik Lisans Programı
DERSİN KATEGORİSİ	Uzmanlık / Alan Dersleri
DERSİN VERİLİŞ ŞEKLİ	Yüz Yüze
DERSİ SUNAN AKADEMİK BİRİM	Matematik Bölümü
DERSİN KOORDİNATÖRÜ	Elif DEMİR
ASİSTAN(LAR)	
DERSİN AMACI	Bu dersin amacı, öğrencilere normlu uzaylarda sayısal bölgeler konusundaki kavramsal ve teorik temeli kazandırmaktır. Öğrenciler, eliptik bölge, spektral kapsama, sayısal yarıçap, normal operatörler, sayısal sınır, W-bölge çeşitleri, değer alanı, Gershgorin kümeleri ve genelleştirilmiş bölgeler gibi temel kavramları detaylı biçimde inceleyeceklerdir. Ders kapsamında, bu kavramlar hem teorik analiz hem de uygulamalı örnekler aracılığıyla ele alınacak; öğrenciler sayısal bölgelerin lineer operatörler üzerindeki etkilerini, spektral özelliklerle ilişkilerini ve normlu uzaylarda analitik ve geometrik yorumlarını kavrayacaklardır. Bu sayede öğrenciler, normlu uzaylarda operatör teorisi ve sayısal analiz alanlarında sağlam bir kuramsal ve uygulamalı temel oluşturacak, matematiksel problem çözme becerilerini ileri düzeye taşıyacaklardır.
DERSİN İÇERİĞİ	Normlu uzaylar ve lineer operatörler; eliptik bölge; spektral kapsama; sayısal yarıçap; normal operatörler; sayısal sınır; diğer W-bölge türleri; değer alanı; Gershgorin kümeleri; genelleştirilmiş bölgeler; cebirsel sayısal alanlar.
DERS KİTABI / MALZEMESİ / ÖNERİLEN KAYNAKLAR	Ders Kitabı: Gustafson, Karl E., Rao, Duggirala, K. M. <i>Numerical Range: The Field of Values of Linear Operators and Matrices</i>. Springer-Verlag, 1996. Zorunlu Kaynaklar: [1] Rynne, Bryan P., Youngson, Martin A. <i>Linear Functional Analysis</i>. Springer, 2008.



	Önerilen Kaynaklar: Kreyszig, Erwin O. <i>Introductory Functional Analysis with Applications</i> . Wiley, 1989.	
Ders Öğrenim Çıktıları	Bu dersi başarıyla tamamlayan öğrenciler, 1. Eliptik bölge ve spektral kapsama kavramlarını anlayarak, uygun örnekler üzerinde uygulayabileceklerdir. 2. Sayısal yarıçap ve sayısal sınır kavramlarını hesaplayarak, analiz edebileceklerdir. 3. Normal operatörlerin sayısal bölgelerle ilişkilerini açıklayabileceklerdir. 4. Çeşitli W-bölge türlerini ve genelleştirilmiş bölgeleri tanıyabileceklerdir. 5. Değer alanı ve Gershgorin kümeleri kavramlarına hakim olacaklardır.	
DEĞERLENDİRME SİSTEMİ		
Etkinlikler	Sayı	Katkı Payı
Devam/Katılım		
Laboratuvar		
Uygulama		
Arazi Çalışması		
Derse Özgü Staj		
Kısa Sınavlar/Stüdyo Kritiği (Zorunlu): • İçerik: Sınav haftasına kadar işlenen konuların tümünü kapsayan kapsamlı soruların sorulması • Format: Yüz yüze. Çoktan seçmeli kısa sınav (15-20 dakika) • Detaylı Değerlendirme Kriterleri: -Derste işlenen teorik konular ile ilgili problemleri çözebilme	4	%20
Ödev		
Sunum/Jüri		
Proje		
Seminer/Workshop		
Ara Sınavlar: • İçerik: Sınav haftasına kadar işlenen konuların tümünü kapsayan kapsamlı sorular • Format: Yüz yüze. Sınav (90 dakika) • Detaylı Değerlendirme Kriterleri: -Dersin temel kavramlarının anlaşıldığının gösterilmesi -Teorik konularla ilgili problemlerin çözülebilmesi -Teorik düşünme süreçlerinin yürütülmesi	1	%40
Final: • İçerik: Dersin tüm içeriğini kapsayan kapsamlı sorular • Format: Yüz yüze. Sınav (90 dakika) • Detaylı Değerlendirme Kriterleri:	1	%40



-Derste işlenen tüm konuların derinlemesine kavranmış olduğunun gösterilmesi -İleri düzey problem çözme becerilerinin kullanılabilmesi			
Dönem İçi Çalışmaların Başarı Notuna Katkısı			%60
Final Sınavının Başarı Notuna Katkısı			%40
TOPLAM			%100
HAFTALIK KONULAR VE İLGİLİ ÖN HAZIRLIK ÇALIŞMALARI			
HAFTALAR	KONULAR	Ön Hazırlık	
1	Konu Anlatımı: Normlu uzaylar, lineer operatörler tanımı, temel kavramların ve terminolojinin açıklanması; dersin kapsamı ve uygulama alanlarının genel tanıtımı. Sınıf-İçi Uygulama (15 dk.): Basit normlu uzay örnekleri ve lineer operatörler üzerinde kısa hesaplamalar; öğrencilerin kavramları görselleştirmesi. Sınıf-İçi Tartışma (5 dk.): Sayısal bölgelerin matematikteki önemi, farklı disiplinlerdeki uygulama alanları ve öğrencilerin günlük yaşam veya mühendislik uygulamalarıyla ilişkilendirmesi.	1. Temel kavramların hatırlanması: Normlu uzaylar, lineer operatörler. Kaynak: [1], 31-39; 87-96. 2. Sayısal bölge kavramının tanıtılması. Kaynak: Ders Kitabı, 1-2.	
2	Konu Anlatımı: Sayısal bölge kavramı, tanımı ve temel özellikleri Sınıf-İçi Uygulama (15 dk.): Basit lineer operatörler için sayısal bölge hesaplamaları; öğrencilerin kavramı uygulamalı olarak görmesi Sınıf-İçi Tartışma (5 dk.): Sayısal bölge ile operatör spektrumu arasındaki ilişki üzerine tartışma	1. Temel kavramların hatırlanması: Normlu uzaylar, lineer operatörler. Kaynak: [1], 31-39; 87-96. 2. Sayısal bölge kavramı ve özellikleri. Kaynak: Ders Kitabı, 1-3.	
3	Konu Anlatımı: Eliptik bölge kavramı ve temel özellikleri Sınıf-İçi Uygulama (15 dk.): Basit lineer operatörler için eliptik bölge hesaplamaları; öğrencilerin kavramı uygulamalı olarak görmesi. Sınıf-İçi Tartışma (5 dk.): Eliptik bölgenin sayısal bölgeyle ilişkisi üzerine tartışılması Kısa Sınav 1 (15-20 dk.): Ders sonunda, bu derse kadar işlenen konuları içeren bir kısa sınavın yapılması	1. Bir lineer operatörün özdeğer ve özvektör kavramlarının gözden geçirilmesi. Kaynak: [1], 8-9. 2. Sayısal bölgenin elips çıkma koşulu ve Toplietz-Hausdorff Teoreminin okunması. Kaynak: Ders Kitabı, 3-5. 3. Kısa Sınav 1: (sayısal bölge kavramı, Eliptik bölge kavramı) Kaynak: Ders Kitabı, 1-3; 3-5.	
4	Konu Anlatımı: Spektral kapsama kavramı; operatör spektrumunun sayısal bölge ile ilişkisi ve temel özellikleri Sınıf-İçi Uygulama (15 dk.): Basit lineer operatörler üzerinde spektral kapsama hesaplamaları ve görselleştirmeler Sınıf-İçi Tartışma (5 dk.): Spektral kapsamanın matematikteki önemi, normal operatörlerle ilişkisi ve uygulamalardaki yeri üzerine tartışma	1. Operatörlerin spektrumu ve adjoint operatör kavramlarının gözden geçirilmesi. Kaynak: [1], 169; 183-185. 2. Spektral kapsama kavramı; operatör spektrumunun sayısal bölge ile ilişkisi, örnek ve ilgili teoremlerin okunması. Kaynak: Ders Kitabı, 6-8.	
5	Konu Anlatımı: Sayısal yarıçap kavramı, tanımı ve temel özellikleri; sayısal yarıçap ile norm arasındaki ilişkiler ve örnekler Sınıf-İçi Uygulama (15 dk.): Basit matrisler ve lineer operatörler için sayısal yarıçap hesaplamaları Sınıf-İçi Tartışma (5 dk.): Sayısal yarıçapın analitik ve geometrik bakış açılarıyla önemi ve spektral yarıçap ile ilişkisi üzerine değerlendirme Kısa Sınav 2 (15-20 dk.): Ders sonunda, bu derse kadar işlenen konuları içeren bir kısa sınavın yapılması	1. Operatör normu kavramı ve temel özelliklerinin gözden geçirilmesi. Kaynak: [1], 96-98. 2. Sayısal yarıçap kavramı, tanımı ve temel özellikleri; sayısal yarıçap ile norm arasındaki ilişkiler ve örneklerin incelenmesi. Kaynak: Ders Kitabı, 8-14. 3. Kısa Sınav 2: (spektral kapsama kavramı, Sayısal yarıçap kavramı) Kaynak: Ders Kitabı, 6-8; 8-14.	



6	Konu Anlatımı: Normal operatörler kavramı, tanımı ve temel özellikleri. normal operatörler için spektrum ve sayısal bölge arasındaki ilişkiler Sınıf-İçi Uygulama (15 dk.): Normal operatörlere ilişkin örnekler üzerinde sayısal bölge ve spektrum karşılaştırması Sınıf-İçi Tartışma (5 dk.): Normal operatörlerin özel rolü ve sayısal bölgelerin arasındaki ilişkilere dair değerlendirme	1. Normal operatörlerin tanımı ve temel özelliklerinin gözden geçirilmesi. Kaynak: [1], 176-178. 2. Normal operatörler için spektrum ve sayısal bölge arasındaki ilişkilerin incelenmesi. Kaynak: Ders Kitabı, 15-17.
7	Konu Anlatımı: Sayısal bölgenin sınır noktalarının özelliklerinin incelenmesi ve sayısal bölgenin kapanış kümesi ile olan ilişkilerinin incelenmesi Sınıf-İçi Uygulama (15 dk.): Verilen operatörler için sayısal sınırın belirlenmesi ve geometrik temsilinin tartışılması Sınıf-İçi Tartışma (5 dk.): Sayısal sınırın, operatör teorisi ve uygulamalı matematik açısından neden önemli olduğu üzerine fikir alışverişi	1. Kapanış kavramlarının hatırlanması; temel topolojik kavramlar üzerine kısa tekrar Kaynak: [1], 13-14. 2. Sayısal bölgenin sınır noktalarının özellikleri ve kapanış kümesiyle olan ilişkilerin anlaşılabilmesi için gerekli bölümlerin okunması. Kaynak: Ders Kitabı, 18-20.
8	Ara Sınav 1	Sınav haftasına kadar işlenen konuların tümünün tekrar edilmesi
9	Konu Anlatımı: Diğer W-bölge (sayısal bölgelerin) araştırılması Sınıf-İçi Uygulama (15 dk.): Verilen operatörler için farklı W-range türlerinin belirlenmesi ve değer alanlarının hesaplanması Sınıf-İçi Tartışma (5 dk.): Farklı W-bölge türlerinin operatör teorisinde ve uygulamalı problemlerde neden önemli olduğu üzerine tartışma	1. Dual uzay ve iç çarpım konularının hatırlanması ve etkinleştirilmesi. Kaynak: [1], 51-54; 105. 2. Diğer W-bölge türleri ve incelemeleri içeren bölümlerin okunması. Kaynak: Ders Kitabı, 22-24.
10	Konu Anlatımı: Değer alanı kavramı, tanımı ve temel özellikleri; son araştırmalarda değer alanının ve varyasyonlarının incelenme sebepleri; temel örnekler ve sınırlı boyutlu uzaylardaki uygulamalar Sınıf-İçi Uygulama (15 dk.): Basit matrisler ve lineer operatörler için değer alanının hesaplanması ve grafiksel gösterimi. Sınıf-İçi Tartışma (5 dk.): Değer alanının analitik ve geometrik bakış açılarıyla önemi; sınırlı boyutlu uzaylarda spektrum ve sayısal bölge ile ilişkisi üzerine değerlendirme Kısa Sınav 3 (15-20 dk.): Ders sonunda, bu derse kadar işlenen konuları içeren bir kısa sınavın yapılması	1. Sonlu boyutlu uzaylar ve Üniter operatörlere ilişkin ön bilgilerin hatırlanması ve etkinleştirilmesi. Kaynak: [1], 4; 181-182. 2. Sonlu boyutlu uzaylarda değer alanı kavramına ilişkin bilgilerin okunması. Kaynak: Ders Kitabı, 109-113. 3. Kısa Sınav 3: (normal operatörler için spektrum ve sayısal bölge arasındaki ilişkiler, Sayısal bölgenin sınır noktalarının özellikleri ve sayısal bölgenin kapanış kümesi ile olan ilişkileri, Diğer W-bölgeler) Kaynak: Ders Kitabı, 15-17; 18-20; 22-24.
11	Konu Anlatımı: Matrislerin toplamının sayısal bölgesi kavramı, Gershgorin kümeleri, Gershgorin diskleri ile operatör spektrumu arasındaki ilişkiler Sınıf-İçi Uygulama (15 dk.): Basit matrisler için toplamın sayısal bölgesinin hesaplanması Sınıf-İçi Tartışma (5 dk.): Gershgorin kümelerinin spektral tahminlerdeki önemi ile uygulamalardaki rolü üzerine değerlendirme	1. Sayısal bölge kavramının hatırlanması. Kaynak: Ders Kitabı, 1-3. 2. Sayısal bölgeyi içeren kümelerin belirlenmemesinin motivasyonu ve Gershgorin Teoremi ile bağlantısı ile kısımların okunması. Kaynak: Ders Kitabı, 113-117.
12	Konu Anlatımı: Genelleştirilmiş sayısal bölgeler, farklı operatörlerde genelleştirilmiş bölgelerin tanımı, hesaplanması ve özellikleri (C-sayısal bölge, k-sayısal bölge ve F- sayısal bölge) Sınıf-İçi Uygulama (15 dk.): Verilen operatörler için genelleştirilmiş sayısal bölgelerin hesaplanması Sınıf-İçi Tartışma (5 dk.): Genelleştirilmiş bölgelerin lineer operatörlerin davranışlarını anlamadaki rolü ve spektral tahminlerdeki önemi üzerine tartışma	1. temel kavramların hatırlanması: Sayısal bölge tanımı, temel özellikleri ve lineer operatörlerdeki önemi. Kaynak: Ders Kitabı, 1-3. 2. Genelleştirilmiş sayısal bölgeler C-sayısal bölge, k-sayısal bölge ve f-sayısal bölge kavramları, tanımları, temel özellikleri içeren bölümlerin okunması. Kaynak: Ders Kitabı, 127-133.
13	Konu Anlatımı: F-sayısal bölgesinin bir genelleştirilmesi olan	1. Temel kavramların hatırlanması: Lineer



	cebirsel sayısal alanların anlatımı ve onun bir varyasyonu olan M-sayısal bölgelerin incelenmesi Sınıf-İçi Uygulama (15 dk.): Verilen lineer operatörler için cebirsel sayısal alanların ve M-sayısal bölgelerin hesaplanması Sınıf-İçi Tartışma (5 dk.): Cebirsel sayısal alanlar ve M-sayısal bölgelerin lineer operatörlerin davranışlarını anlamadaki rolü üzerine tartışma Kısa Sınav 4 (15-20 dk.): Ders sonunda, bu derse kadar işlenen konuları içeren bir kısa sınavın yapılması	operatörler, sayısal bölge. Kaynaklar: [1], 87-96. Ders Kitabı 133-134. 2. Konunun incelenmesi: Cebirsel sayısal alanların bir genelleştirmesi olarak M-sayısal bölgelerin tanımı, temel özellikleri ve uygulama alanlarının okunması. Kaynak: Ders Kitabı, 133-134. 3. Kısa Sınav 4: (değer alanı kavramı, Matrislerin toplamının sayısal bölgesi kavramı, Gershgorin kümeleri, Genelleştirilmiş sayısal bölgeler) Kaynak: Ders Kitabı, 109-113; 113-117; 127-133.
14	Konu Anlatımı: Önceki haftalarda işlenen tüm kavramların uygulamalı örneklerle pekiştirilmesi; cebirsel sayısal alanlar, Gershgorin kümeleri ve genelleştirilmiş bölgeler üzerinden problem çözümü Sınıf-İçi Uygulama: (15 dk) Öğrencilere çeşitli operatörler ve matrisler verilir; Gershgorin kümeleri ve genelleştirilmiş bölgelerin hesaplanması ve yorumlanması Sınıf-İçi Tartışma: (5 dk.) Cebirsel sayısal alanlar, Gershgorin kümeleri ve genelleştirilmiş bölgelerin hesaplama sonuçlarının yorumlanması; farklı yöntemlerin avantajları ve sınırlılıkları üzerine fikir alışverişi; operatörlerin davranışı ve spektral tahminler açısından elde edilen bilgilerin önemi üzerine tartışma	1. Temel kavramların hatırlanması: Cebirsel sayısal alanlar, Gershgorin kümeleri ve genelleştirilmiş sayısal bölgeler; temel tanımlar, özellikler ve önceki haftalarda işlenen ilgili kavramların gözden geçirilmesi. Kaynak: Ders Kitabı, 22-24; 109-117; 127-133.
15	Konu Anlatımı: Tüm konuların genel tekrarı ve kavramların bütünleştirilmesi Sınıf-İçi Uygulama (15 dk.): Önceki haftalardan seçilen karmaşık problemler üzerinden çözüm çalışması; öğrencilerin kendi sayısal bölge hesaplamalarını yapmaları ve sonuçları tartışmaları Sınıf-İçi Tartışma (5 dk.): Dersin genel kazanımlarının değerlendirilmesi; hangi konuların güçlü olduğu, hangi konularda ek çalışmaya ihtiyaç olduğu üzerine tartışma	1. Temel kavramların hatırlanması: Cebirsel sayısal alanlar, Gershgorin kümeleri ve genelleştirilmiş sayısal bölgeler; temel tanımlar, özellikler ve önceki haftalarda işlenen ilgili kavramların gözden geçirilmesi. Kaynak: Ders Kitabı, 22-24; 109-117; 127-133.
16	Final	İşlenen konuların tümünün tekrar edilmesi

AKTS İŞYÜKÜ TABLOSU

Etkinlikler	Sayı	Süresi (Saat)	Toplam İşyükü
Ders Saati	14	3	42
Laboratuvar			
Uygulama (sözlü Sınav)			
Arazi Çalışması			
Sınıf Dışı Ders Çalışması	14	3	42
Derse Özgü Staj			
Ödev			
Küçük Sınavlar/Stüdyo Kritiği	4	2	8
Projeler			
Sunum / Seminer			
Ara Sınavlar (Sınav Süresi + Sınav Hazırlık Süresi)	1	20	20
Final (Sınav Süresi + Sınav Hazırlık Süresi)	1	30	30



Toplam İş yükü:	142
Toplam İş yükü / 30(s):	4.73
AKTS Kredisi:	5



COURSE INFORMATION FORM

FACULTY / GRADUATE SCHOOL	Faculty of Arts and Sciences
DEPARTMENT / PROGRAMME	Mathematics
TITLE OF COURSE	Numerical Ranges in Normed Spaces
CODE	MAT4350
LOCAL CREDIT	3
ECTS	5
LECTURE HOUR / WEEK	3
PRACTICAL HOUR / WEEK	0
LABORATORY HOUR / WEEK	0
PREREQUISITE	None
SEMESTER	Fall, Spring
COURSE LANGUAGE	English, Turkish
LEVEL OF COURSE	First Cycle
COURSE TYPE	Elective @ Bachelor Programme in Mathematics
COURSE CATEGORY	Major Area Courses
MODE OF DELIVERY	Face-to-Face
OWNER ACADEMIC UNIT	Department of Mathematics
COURSE COORDINATOR	Elif DEMİR
ASSISTANT(S)	
COURSE OBJECTIVES	This course aims to help students gain a conceptual and theoretical foundation on numerical ranges in normed spaces. Students will study in detail fundamental concepts such as elliptic range, spectral inclusion, numerical radius, normal operators, numerical boundary, various W-ranges, value field, Gershgorin sets, and generalized ranges. The course will address these concepts through both theoretical analysis and practical examples, enabling students to understand the effects of numerical ranges on linear operators, their relationships with spectral properties, and their analytical and geometric interpretations in normed spaces. Through this, students will build a solid theoretical and applied foundation in operator theory and numerical analysis in normed spaces, enhancing their advanced mathematical problem-solving skills.
COURSE CONTENT	Normed spaces and linear operators; elliptic range; spectral inclusion; numerical radius; normal operators; numerical boundary; other W-range types; value field; Gershgorin sets; generalized ranges; algebraic numerical ranges.
RECOMMENDED OR REQUIRED READINGS	Coursebook: Gustafson, Karl E., Rao, Duggirala, K. M. <i>Numerical Range: The Field of Values of Linear Operators and Matrices</i> . Springer-Verlag, 1996. Required Readings: [1] Rynne, Bryan P., Youngson, Martin A. <i>Linear Functional Analysis</i> . Springer, 2008. Recommended Readings: Kreyszig, Erwin O. <i>Introductory Functional Analysis with Applications</i> . Wiley, 1989.



Course Learning Outcomes

Upon successful completion of this course, students will be able to:

1. Apply the concepts of elliptic regions and spectral inclusion through appropriate examples.
2. Analyze the concepts of numerical radius and numerical range through calculations.
3. Explain the relationship between normal operators and numerical ranges.
4. Identify various types of W-regions and generalized regions.
5. Interpret the concepts of the field of values and Gershgorin sets.

EVALUATION SYSTEM

Activities	Number	Percentage of Grade
Attendance/Participation		
Laboratory		
Application		
Field Work		
Special Course Internship (Work Placement)		
Quizzes/Studio Critics: • Content: Comprehensive questions covering all topics addressed up to the exam week • Format: Face-to-face multiple-choice quiz (15-20 minutes) • Detailed Assessment Criteria: -Ability to solve problems related to the theoretical topics covered in the course	4	%20
Homework Assignments		
Presentations/Jury		
Project		
Seminar/Workshop		
Midterms: • Content: Comprehensive questions covering all topics addressed up to the exam week • Format: Face-to-face written exam. (90 minutes). • Detailed Assessment Criteria: -Demonstration of understanding of the fundamental concepts of the course -Ability to solve problems related to theoretical topics -Ability to carry out theoretical reasoning processes	1	%40
Final: • Content: Comprehensive questions covering the entire content of the course • Format: Face-to-face written exam. (90 minutes). • Detailed Assessment Criteria: -Ability to apply advanced problem-solving skills	1	%40



-Demonstration of a thorough understanding of all topics covered in the course		
Percentage of In-Term Studies	%60	
Percentage of Final Examination	%40	
TOTAL	%100	

WEEKLY SUBJECTS AND RELATED PREPARATION STUDIES

WEEKS	COURSE OUTLINE	Related Preparation
1	Lecture: Definition of normed spaces and linear operators, explanation of basic concepts and terminology; general introduction to the scope of the course and its applications Practice (15 minutes): Simple examples of normed spaces and linear operators with short calculations; helping students visualize the concepts In-Class Discussion (5 minutes): Discussion on the importance of numerical ranges in mathematics, their applications in various disciplines, and connecting the concepts to real-life or engineering examples	1. Recollection and activation of prior knowledge on the concepts of vector space and subspace, and the definitions of one-to-one and onto functions. Source: Coursebook, 26-34; 38-40. 2. Reading the sections on linear transformations: Special types of linear transformations (endomorphism, epimorphism, isomorphism, automorphism). Source: Coursebook, 140-143.
2	Lecture: The concept of the numerical range, its definition, and fundamental properties Practice (15 minutes): Calculation of the numerical range for simple linear operators; students observe the concept through practical examples In-Class Discussion (5 minutes): Discussion on the relationship between the numerical range and the operator spectrum	1. Review of basic concepts: Normed spaces, linear operators. Source: [1], 31–39; 87–96. 2. Numerical range concept and its properties. Source: Coursebook, 1–3.
3	Lecture: Concept of the elliptical region and its basic properties Practice (15 minutes): Calculations of elliptical regions for simple linear operators; allowing students to see the concept in practice In-Class Discussion (5 minutes): Discussion on the relationship between the elliptical region and the numerical range. Quiz 1 (15-20 mnts.): A quiz at the end of the class covering the topics studied up to the session	1. Review of the concepts of eigenvalues and eigenvectors of a linear operator. Source: [1], 8–9. 2. Condition for the numerical range to be elliptical and reading of the Toeplitz-Hausdorff Theorem. Source: Coursebook, 3–5. 3. Quiz 1: (concept of the numerical range, concept of the elliptical region) Source: Coursebook, 1-3; 3-5.
4	Lecture: Concept of spectral inclusion; the relationship between the operator spectrum and the numerical range, and its basic properties Practice (15 minutes): Calculations and visualizations of spectral inclusion for simple linear operators In-Class Discussion (5 minutes): Discussion on the mathematical significance of spectral inclusion, its relation to normal operators, and its role in applications	1. Review of the spectrum of operators and the concept of the adjoint operator. Source: [1], 169; 183-185. 2. Concept of spectral inclusion; the relationship between the operator spectrum and the numerical range, examples, and reading of related theorems. Source: Coursebook, 6-8.
5	Lecture: Concept of numerical radius, its definition, and basic properties; relationships between numerical radius and norm, with examples	1. Review of the concept of operator norm and its basic properties. Source: [1], 96-98. 2. Concept of numerical radius, its definition, and basic properties; examination of the relationships between



	Practice (15 minutes): Calculations of numerical radius for simple matrices and linear operators In-Class Discussion (5 minutes): Evaluation of the importance of numerical radius from analytical and geometric perspectives, and its relation to the spectral radius Quiz 2 (15-20 mnts.): A quiz at the end of the class covering the topics studied up to the session	numerical radius and norm, with examples. Source: Coursebook, 8-14. 3. Quiz 2: (concept of spectral inclusion, concept of numerical radius) Source: Coursebook, 6-8; 8-14.
6	Lecture: Concept of normal operators, their definition, and basic properties. Relationships between the spectrum and numerical range for normal operators Practice (15 minutes): Comparison of numerical range and spectrum on examples of normal operators In-Class Discussion (5 minutes): Evaluation of the special role of normal operators and the relationships between their numerical ranges	1. Review of the definition and basic properties of normal operators. Source: [1], 176-178. 2. Examination of the relationships between the spectrum and numerical range for normal operators. Source: Coursebook, 15-17.
7	Lecture: Examination of the properties of boundary points of the numerical range and the relationships between the numerical range and its closure Practice (15 minutes): Determination of the numerical boundary for given operators and discussion of its geometric representation In-Class Discussion (5 minutes): Exchange of ideas on the importance of the numerical boundary in operator theory and applied mathematics	1. Review of the concept of closure; brief recap of basic topological concepts. Source: [1], 13-14. 2. Reading the sections necessary to understand the properties of boundary points of the numerical range and their relationships with the closure. Source: Coursebook, 18-20.
8	Midterm 1	Review of all topics covered up to the exam week.
9	Lecture: Investigation of other W-ranges (numerical ranges) Practice (15 minutes): Determination of different types of W-ranges for given operators and calculation of their value sets In-Class Discussion (5 minutes): Discussion on the importance of different types of W-ranges in operator theory and applied problems	1. Review and activation of the topics of dual space and inner product. Source: [1], 51-54; 105. 2. Reading the sections covering other types of W-ranges and their examinations. Source: Coursebook, 22-24.
10	Lecture: Concept of the field of values, its definition and basic properties; reasons for studying the field of values and its variations in recent research; basic examples and applications in finite-dimensional spaces Practice (15 minutes): Calculation and graphical representation of the field of values for simple matrices and linear operators In-Class Discussion (5 minutes): Evaluation of the importance of the field of values from analytical and geometric perspectives; its relationship with the spectrum and numerical range in finite-dimensional spaces Quiz 3 (15-20 mnts.): A quiz at the end of the class covering the topics studied up to the session	1. Review and activation of prior knowledge on finite-dimensional spaces and unitary operators. Source: [1], 4; 181-182. 2. Reading on the concept of the field of values in finite-dimensional spaces. Source: Coursebook, 109-113. 3. Quiz 3: (relationships between the spectrum and numerical range for normal operators, properties of boundary points of the numerical range and the relationships between the numerical range and its closure, other W-ranges) Source: Coursebook, 15-17; 18-20; 22-24
11	Lecture: Concept of the numerical range of the sum of matrices, Gershgorin sets, and the relationships between Gershgorin disks and the operator spectrum Quick Practice (15 minutes): Calculation of the numerical range of the sum for simple matrices	1. Review of the concept of numerical range. Source: Coursebook, 1-3. 2. Reading the sections on the motivation for identifying



	In-Class Discussion (5 minutes): Evaluation of the importance of Gershgorin sets in spectral estimates and their role in applications	sets containing the numerical range and its connection with the Gershgorin Theorem. Source: Coursebook, 113-117.
12	Lecture: Generalized numerical ranges, definition, calculation, and properties of generalized ranges for different operators (C-numerical range, k-numerical range, and F-numerical range) Practice (15 minutes): Calculation of generalized numerical ranges for given operators In-Class Discussion (5 minutes): Discussion on the role of generalized ranges in understanding the behavior of linear operators and their importance in spectral estimates	1. Review of basic concepts: Definition of the numerical range, its fundamental properties, and its importance in linear operators. Source: Coursebook, 1-3. 2. Reading the sections on generalized numerical ranges, including the concepts, definitions, and basic properties of the C-numerical range, k-numerical range, and f-numerical range. Source: Coursebook, 127-133.
13	Lecture: Presentation of algebraic numerical ranges, which are a generalization of the F-numerical range, and examination of their variation, the M-numerical ranges Practice (15 minutes): Calculation of algebraic numerical ranges and M-numerical ranges for given linear operators. In-Class Discussion (5 minutes): Discussion on the role of algebraic numerical ranges and M-numerical ranges in understanding the behavior of linear operators Quiz 4 (15-20 mnts.): A quiz at the end of the class covering the topics studied up to the session	1. Review of basic concepts: Linear operators, numerical range. Sources: [1], 87-96; Coursebook, 133-134. 2. Examination of the topic: Reading on the definition, basic properties, and applications of M-numerical ranges as a generalization of algebraic numerical ranges. Source: Coursebook, 133-134. 3. Quiz 4: (concept of the field of values, Calculation of the numerical range of the sum for simple matrices, Gershgorin sets, generalized numerical ranges) Source: Coursebook, 109-113; 113-117; 127-133.
14	Lecture: Reinforcement of all concepts covered in previous weeks through applied examples. Problem solving on algebraic numerical ranges, Gershgorin sets, and generalized ranges. Practice (15 minutes): Students are given various operators and matrices; calculation and interpretation of Gershgorin sets and generalized ranges. In-Class Discussion (5 minutes): Interpretation of the results of algebraic numerical ranges, Gershgorin sets, and generalized ranges; exchange of ideas on the advantages and limitations of different methods; discussion on the importance of the obtained information for understanding operator behavior and spectral estimates	1. Review of concepts: Algebraic numerical ranges, Gershgorin sets, and generalized numerical ranges; basic definitions, properties, and a recap of the related concepts covered in previous weeks. Source: Coursebook, 22-24, 109-117, 127-133.
15	Lecture: General review of all topics and integration of concepts Practice (15 minutes): Problem-solving practice on selected complex problems from previous weeks; students perform their own $W(A)$ calculations and discuss the results In-Class Discussion (5 minutes): Evaluation of the overall learning outcomes of the course; discussion on which topics are strong and which areas require additional study	1. Review of concepts: algebraic numerical ranges, Gershgorin sets, and generalized numerical ranges; basic definitions, properties, and a recap of the related concepts covered in previous weeks. Source: Coursebook, 22-24, 109-117, 127-133.
16	Final	Review of all topics covered.



ECTS WORKLOAD TABLE

Activities	Number	Duration (Hour)	Total Workload
Course Hours	14	3	42
Laboratory			
Application			
Field Work			
Study Hours Out of Class	14	3	42
Special Course Internship (Work Placement)			
Homework Assignments			
Quizzes/Studio Critics	4	2	8
Project			
Presentations / Seminar			
Mid-Terms (Examination Duration + Examination Prep. Duration)	1	20	20
Final (Examination Duration + Examination Prep. Duration)	1	30	30
Total Workload:			142
Total Workload / 30(h):			4.73
ECTS Credit:			5



Ders Öğrenim Çıktısı & Program Çıktısı Matrisi

	<u>DÖC-1</u>	<u>DÖC-2</u>	<u>DÖC-3</u>	<u>DÖC-4</u>	<u>DÖC-5</u>
PC-1 Geometri, analiz, lineer cebir, soyut matematik, cebir ve diferansiyel denklemler gibi matematiğin temel alanlarındaki tanımları ve teoremleri ifade edebilecek, bunlar arasında ilişki kurabilecek ve tıların uygulamalarını açıklayabileceklerdir. / State the definitions and theorems in fundamental areas of mathematics such as geometry, analysis, linear algebra, abstract mathematics, and differential equations, establish connections between them and explain their applications.	<u>4</u>	<u>4</u>	<u>4</u>	<u>4</u>	<u>4</u>
PC-2 Matematik alanındaki teorik ve uygulamalı bilgilerini ve matematiksel düşünme becerilerini kullanarak standart ve karmaşık matematiksel problemleri tanımlayabilecek ve analitik ve/veya sayısal yöntemlerle çözebilecek ve matematiksel bir önermenin geçerliliğini farklı ispat yöntemleri ile ispatlayabileceklerdir. / Identify standard and complex mathematical problems, solve these problems with analytical and/or numerical methods and prove the validity of a mathematical proposition through various proof techniques using their theoretical and applied knowledge of mathematics and mathematical thinking skills.	<u>4</u>	<u>4</u>	<u>4</u>	<u>4</u>	<u>4</u>
PC-3 Matematik alanındaki teorik ve uygulamalı bilgilerini ve matematiksel düşünme becerilerini kullanarak gerçek hayattaki problemlerin matematiksel modellerini geliştirebilecek ve bu modelleri kullanarak problemlere geçerli çözümler üretebileceklerdir. / Develop mathematical models for real-life problems and generate valid solutions based on these models using their theoretical and applied knowledge of mathematics and mathematical thinking skills.	<u>3</u>	<u>3</u>	<u>3</u>	<u>3</u>	<u>3</u>



PC-4 Disiplinlerarası bir yaklaşımla, farklı alanlarda edinmiş oldukları bilgileri sentezleyebileceklerdir. / Synthesise knowledge acquired from different disciplines through an interdisciplinary approach.	<u>4</u>	<u>4</u>	<u>4</u>	<u>4</u>	<u>4</u>
PC-5 Matematik alanında edindikleri bilgi birikimlerini ve matematiksel düşünme becerilerini, teorik matematik, yazılım, finans ve yönetim matematiği, biyomatematik, veri bilimi ve finansal istatistik yöntemleri gibi disiplin-içi ve disiplinlerarası uzmanlık alanlarında geliştirebileceklerdir. / Advance their acquired knowledge in mathematics and mathematical thinking skills in both disciplinary and interdisciplinary areas of specialisation such as pure mathematics, software, financial and managerial mathematics, biomathematics, data science, and financial statistical methods.	<u>4</u>	<u>4</u>	<u>4</u>	<u>4</u>	<u>4</u>
PC-6 Matematik alanında yaygın olarak kullanılan en az bir programlama dili ile bilgisayar ve yapay zekâ teknolojilerini, problemleri çözmek, veri analizi yapmak ve simülasyonlar gerçekleştirmek için kullanabileceklerdir. / Use at least one programming language and computer and artificial intelligence technologies widely employed in mathematics for problem-solving, data analysis, and simulations.	=	=	=	=	=
PC-7 Matematik ve ilgili alanlardaki bilimsel ve teknolojik gelişmeleri izleyebilecek, kariyer fırsatlarını değerlendirerek kişisel ve mesleki gelişim hedeflerini belirleyebilecek ve bu hedeflere ulaşmak için hayat boyu öğrenme stratejilerini kullanabileceklerdir. / Follow scientific and technological developments in mathematics and related fields, assess career opportunities, identify personal and professional development goals, and adopt lifelong learning strategies to achieve these goals.	=	=	=	=	=



PC-8 Bilimsel araştırmalarını ve mesleki faaliyetlerini y�r�t�rken doğabilecek hukuksal sonu�ları ve toplumsal etkileri dikkate alarak mesleki etik ilkeler, kalite standartları ile evrensel değerler doğrultusunda ve sosyal sorumluluk bilinci ve adalet duygusuyla hareket edebileceklerdir. / Act with a sense of social responsibility and justice and in accordance with professional ethical principles, quality standards, and universal values by taking into account potential legal and societal consequences of their scientific research and professional activities.	=	=	=	=	=
PC-9 Bireysel olarak ya da takımlarda etkin bi�imde �alışabileceklerdir. / Work effectively both independently and as part of a team.	<u>3</u>	<u>3</u>	<u>3</u>	<u>3</u>	<u>3</u>
PC-10 Matematik alanında g�venilir bilgi kaynaklarına ulaşarak literat�r taraması yapabilecek ve akademik araştırma tasarlayıp y�r�tebileceklerdir. / Access reliable sources of information, conduct literature reviews, and design and carry out academic research in the field of mathematics.	<u>4</u>	<u>4</u>	<u>4</u>	<u>4</u>	<u>4</u>
PC-11 Matematiksel konuları, teorileri, ispatları, araştırmaları ve problem ���mlerini, matematik terminolojisi kullanarak t�m paydaşlara T�rk�e ve İngilizcede s�zl� ve yazılı olarak etkili bi�imde aktarabileceklerdir. / Effectively communicate mathematical topics, theories, proofs, research, and problem solutions to all relevant stakeholders using appropriate mathematical terminology, both orally and in writing, in Turkish and in English.	<u>4</u>	<u>4</u>	<u>4</u>	<u>4</u>	<u>4</u>