



DERS BİLGİ FORMU

FAKÜLTE / ENSTİTÜ ADI	Fen Edebiyat Fakültesi
BÖLÜM / PROGRAM / ANABİLİM DALI ADI	Matematik
DERSİN ADI	Dual Sayılar ve Kuaterniyonlar Teorisi
DERSİN KODU	MAT4450
YEREL KREDİSİ	3
AKTS KREDİSİ	5
HAFTALIK DERS SAATİ	3
HAFTALIK UYGULAMA SAATİ	0
HAFTALIK LABORATUVAR SAATİ	0
ÖNKOŞULLAR	Yok
YARIYIL	Güz, Bahar
DERSİN DİLİ	İngilizce, Türkçe
DERSİN SEVİYESİ	Lisans
DERSİN TÜRÜ	Seçmeli @ Matematik Lisans Programı
DERSİN KATEGORİSİ	Temel Meslek Dersleri
DERSİN VERİLİŞ ŞEKLİ	Yüz Yüze
DERSİ SUNAN AKADEMİK BİRİM	Matematik Bölümü
DERSİN KOORDİNATÖRÜ	Salim YÜCE
ASİSTAN(LAR)	
DERSİN AMACI	Bu dersin amacı, öğrencilerin temel lineer cebir bilgilerini, kompleks sayıları, dual sayıları, dual sayıların matris gösterimlerini ve dual vektör uzayını öğrenmelerine yardımcı olmak; dual düzlem, mutlak değer, üçgen eşitsizliği ve eşlenik kavramlarını, ayrıca dual sayılarla ilgili temel tanım ve teoremleri sunmak; D-modül yapısı üzerinde iç çarpım, norm, dış çarpım, vektörel çarpım, karma çarpım ve dual vektörlerde baz kavramlarını incelemek; E-Study dönüşümü, dual aç, D-modülde dual izometrilere ve dual matrisler gibi konuları ele almaktır. Ayrıca ders, dual değişkenli fonksiyonların seriye açılımını ve dual integrallerin hesaplanmasını, reel kuaterniyonlar cebirini, reel kuaterniyonlar üzerindeki temel işlemleri, iki vektörün kuaterniyon çarpımını ve reel kuaterniyonların matris gösterimini içermektedir. Ayrıca, simplektik geometri tanıtılmaktadır ve dual kuaterniyonlar üzerindeki temel işlemler incelenmektedir. Ders, öğrencilerin dual sayılar ve kuaterniyonlara özgü soyut kavramları kavramalarını ve bu kavramları hem geometrik hem de analitik bakış açısıyla yorumlayabilmelerini sağlamayı amaçlamaktadır.
DERSİN İÇERİĞİ	Temel lineer cebir bilgileri; kompleks sayılar; dual sayılar, dual sayılar sistemi, dual sayıların matris gösterimi, dual vektör uzayı, dual sayılar ile ilgili temel tanım ve teoremler (dual düzlem, mutlak değer, üçgen eşitsizliği, eşlenik); D-modül, D-modül üzerinde iç çarpım ve norm, E.Study dönüşümü ve dual aç, D-modül üzerinde dış çarpım, vektörel çarpım, karma çarpım ve dual vektörlerde baz kavramı, D-modülde dual izometrilere; dual matrisler; dual değişkenli fonksiyonların seriye açılımı, dual integral; reel kuaterniyonlar cebiri, reel kuaterniyonlar üzerinde temel işlemler, iki vektörün kuaterniyon çarpımı, reel kuaterniyonların matris gösterimi; simplektik geometri; dual kuaterniyonlar ve dual kuaterniyonlar üzerinde temel işlemler.

**DERS KİTABI / MALZEMESİ /
ÖNERİLEN KAYNAKLAR****Ders Kitabı:**

Yüce, Salim. *Sayılar ve Geometri*. 1. baskı, Pegem Akademi Yayıncılık, 2020.

Zorunlu Kaynaklar:

[1] Hacısalihoğlu, H. Hilmi. *Hareket Geometrisi ve Kuaterniyonlar Teorisi*. 1. baskı, Gazi Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Yayınları, 1983.

[2] Müller, Hans Robert. *Kinematik Dersleri*. Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları, Um. 96-Mat No:2, 1963.

[3] Yüce, Salim. *Sayılar ve Matrisler Teorisi*. 1. baskı, Pegem Akademi Yayıncılık, 2023.

[4] Yüce, Salim. *Lineer Cebir*. 8. baskı, Pegem Akademi Yayıncılık, 2025.

Önerilen Kaynaklar:

Blaschke, William, Müller, Hans Robert. *Ebene Kinematik*. Oldenbourg, München, 1956.

Hacısalihoğlu, H. Hilmi. *Lineer Cebir*. 8. baskı, Ankara Üniversitesi, 2000.

Müller, Hans Robert. *Sphärische Kinematik*. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1962.

Ders Öğrenim Çıktıları

Bu dersi başarıyla tamamlayan öğrenciler,

1. Kompleks sayıların ve dual sayıların tanımlarını, dual sayıların matris gösterimlerini ve dual vektör uzayını açıklayabileceklerdir.
2. Dual düzlem, mutlak değer, üçgen eşitsizliği, eşlenik kavramı; dual sayılara ait temel teoremler, D-modül yapısı; iç çarpım, norm, dış çarpım, vektörel çarpım, karma çarpım ve dual vektörlerde baz kavramlarını ifade edebileceklerdir.
3. E-Study dönüşümünü, dual açı kavramını, D-modül üzerindeki dual izometrilere ve dual matrisleri açıklayabileceklerdir.
4. Dual değişkenli fonksiyonların seriyeye açılımını ve dual integralleri hesaplayabileceklerdir.
5. Reel kuaterniyonlar cebirini; kuaterniyonlar arasında toplama ve çarpma işlemleri, eşlenik bulma ve matris gösterimlerini kapsayacak şekilde inceleyeceklerdir.
6. Simplektik geometri kavramını ve dual kuaterniyonlar üzerindeki temel işlemleri açıklayabileceklerdir.
7. Dual sayılar, kuaterniyonlar ve dual kuaterniyonlara özgü soyut kavramları tanımlayarak bu kavramları geometrik ile analitik bakış açısıyla yorumlayabileceklerdir.

DEĞERLENDİRME SİSTEMİ

Etkinlikler	Sayı	Katkı Payı
Devam/Katılım		
Laboratuvar		
Uygulama		
Arazi Çalışması		
Derse Özgü Staj		
Kısa Sınavlar/Stüdyo Kritiği (Zorunlu): • İçerik: İlgili sınav haftasına kadar işlenen konuların tümünü kapsayan kapsamlı soruların sorulması • Format: Yüz yüze. Çoktan seçmeli kısa sınav (20-25 dakika) • Detaylı Değerlendirme Kriterleri: -Dersin temel kavramlarının anlaşıldığının gösterilmesi	4	%20



-Derste işlenen teorik konular ile ilgili problemleri çözebilme		
Ödev		
Sunum/Jüri		
Proje		
Seminer/Workshop		
Ara Sınavlar (Zorunlu): • İçerik: Sınav haftasına kadar işlenen konuların tümünü kapsayan kapsamlı sorular • Format: Yüz yüze. Sınav (90 dakika) • Detaylı Değerlendirme Kriterleri: -Dersin temel kavramlarının anlaşıldığının gösterilmesi -Teorik konularla ilgili problemlerin çözülebilmesi -Teorik düşünme süreçlerinin yürütülmesi	1	%40
Final (Zorunlu): • İçerik: Dersin tüm içeriğini kapsayan kapsamlı sorular • Format: Yüz yüze. Sınav (90 dakika) • Detaylı Değerlendirme Kriterleri: -Derste işlenen tüm konuların derinlemesine kavranmış olduğunun gösterilmesi -İleri düzey problem çözme becerilerinin kullanılabilmesi	1	%40
Dönem İçi Çalışmaların Başarı Notuna Katkısı		%60
Final Sınavının Başarı Notuna Katkısı		%40
TOPLAM		%100

HAFTALIK KONULAR VE İLGİLİ ÖN HAZIRLIK ÇALIŞMALARI

HAFTALAR	KONULAR	Ön Hazırlık
1	Konu Anlatımı: Temel lineer cebir bilgileri; kompleks sayılar Sınıf-içi Uygulama (30 dk.): Verilen kompleks sayıların toplanması, çarpılması, eşleniklerinin bulunması, bölme işlemi ve iç çarpımlarının, normlarının hesaplanması, cebirsel yapısının ele alınması Sınıf-içi Tartışma (20 dk.): Reel sayıların açıklayamadığı matematiksel problemlerde kompleks sayıların kullanımının öneminin incelenmesi, Reel düzlem ve kompleks sayı sisteminin ilişkisinin incelenmesi, Kompleks sayıların cisim olup olmadığını araştırılması	1. Grup, halka, cisim, vektör uzayı ve alt vektör uzayı kavramlarına ilişkin ön bilgilerin hatırlanması ve etkinleştirilmesi. Kaynak: [4], 2-9; 14-41. 2. Temel lineer cebir bilgileri ve kompleks sayılar konularını içeren bölümlerin okunması. Kaynak: Ders Kitabı, 24- 54.
2	Konu Anlatımı: Dual sayılar ve dual sayılar sistemi Sınıf-içi Uygulama (30 dk.): Verilen dual sayıların toplanması, çarpılması, bölme işlemi ve normlarının hesaplanması, cebirsel yapısının ele alınması Sınıf-içi Tartışma (15 dk.): Dual sayılar ile kompleks sayıların temel işlemlerinin karşılaştırılması, dual sayıların cisim olup olmadığının tartışılması	1. Kompleks sayılar ve kompleks sayı sistemi kavramlarına ilişkin ön bilgilerin hatırlanması ve etkinleştirilmesi. Kaynak: Ders Kitabı, 24- 54. 2. Dual sayılar ve dual sayılar sistemi konularını içeren bölümlerin okunması. Kaynaklar: Ders Kitabı, 122-128. [1], 1-10.
	Konu Anlatımı: Dual sayıların matris gösterimi; dual vektör uzayı	1. Kompleks sayıların matris gösterimi kavramlarına ilişkin ön bilgilerin hatırlanması ve etkinleştirilmesi. Kaynak:



3	Sınıf-içi Uygulama (30 dk): Verilen iki dual sayının matris gösteriminin yazdırılması ve bu matrislerin çarpımının hesabı ile dual sayıların çarpımının karşılaştırılması, dual vektörler üzerine çeşitli uygulamalar Sınıf-içi Tartışma (15 dk.): Dual vektör uzayının, reel vektör uzaylarından farklarının değerlendirilmesi; dual sayıların matris gösteriminin uygulamalarda sağladığı avantajların irdelenmesi Kısa Sınav 1 (25-30 dk.): Ders sonunda, 1. ve 2. hafta derste işlenen konuları içeren bir kısa sınavın yapılması	Ders Kitabı, 33-35. 2. Dual sayıların matris gösterimi ve dual vektör uzayı konularını içeren bölümlerin okunması. Kaynaklar: Ders Kitabı, 129-131. [1], 11-14; 18-21. 3. Kısa Sınav 1: (2. haftanın sonuna kadar olan tüm konular) Kaynak: Ders Kitabı, 24-54; 122-128. [1], 1-10.
4	Konu Anlatımı: Dual sayılar ile ilgili temel tanım ve teoremler (dual düzlem, mutlak değer, üçgen eşitsizliği, eşlenik) Sınıf-içi Uygulama (30 dk): Verilen dual sayıların mutlak değerlerinin, normlarının ve eşleniklerinin bulunması, üçgen eşitsizliğinin sağladığının gösterilmesi Sınıf-içi Tartışma (15 dk.): Dual eşlenik ile reel/kompleks eşlenik benzerlikleri ve farkları, dual düzlemin yapısının tartışılması	1. Kompleks sayılar için düzlem, mutlak değer, üçgen eşitsizliği ve eşlenik kavramlarına ilişkin ön bilgilerin hatırlanması ve etkinleştirilmesi. Kaynak: Ders Kitabı, 24-55. 2. Dual sayılar ile ilgili temel tanım ve teoremler konularını içeren bölümlerin okunması. Kaynaklar: Ders Kitabı, 126-129; 146. [1], 14-17.
5	Konu Anlatımı: D-modül, D-modül üzerinde iç çarpım ve norm tanımı Sınıf-içi Uygulama (30 dk.): Verilen dual vektörlerin iç çarpımını ve normunun hesaplanması Sınıf-içi Tartışma (15 dk.): Öğrencilerden verilen dual vektörlerin iç çarpımını ve normunu hesaplamaları durumunda vektörlerin dual kısımların normu etkileyip etkilemediğini araştırılması	1. Vektör uzaylarında iç çarpım ve norm kavramlarına ilişkin ön bilgilerin hatırlanması ve etkinleştirilmesi. Kaynak: [4], 46-56. 2. D-modül, D-modül üzerinde iç çarpım ve norm tanımı konularını içeren bölümlerin okunması. Kaynaklar: Ders Kitabı, 167-172. [1], 25-28.
6	Konu Anlatımı: E-Study dönüşümü; dual açısı Sınıf-içi Uygulama (30 dk.): Verilen bir Θ dual açısının trigonometrik açılımlarının $\cos(\Theta)$ ve $\sin(\Theta)$ için hesaplanması ve reel kısmın dönmeyi, dual kısmın ötelemeyi temsil ettiğinin gösterilmesi Sınıf-içi Tartışma (10 dk.): E-Study dönüşümünün robotikte, bilgisayar grafiğinde veya kinematikte dönme-öteleme ilişkisini sadeleştirmesinin irdelenmesi ve dual açıların dönme ve ötelemeyi birlikte temsil etmesinin mühendislik ve robotikte sağladığı avantajların tartışılması	1. Lineer dönüşüm ve vektörler arasındaki açı kavramlarına ilişkin ön bilgilerin hatırlanması ve etkinleştirilmesi. Kaynak: [4], 50-51; 140-158. 2. E-Study dönüşümü ve dual açı konularını içeren bölümlerin okunması. Kaynaklar: Ders Kitabı, 172-175. [1], 29-41.
7	Konu Anlatımı: D-modül üzerinde dış çarpım, vektörel çarpım, karma çarpım; dual vektörlerde baz kavramı Sınıf-içi Uygulama (30 dk.): Verilen dual vektörlerin dış çarpımının hesaplanması, üç dual vektör için karma çarpımın bulunması ve verilen vektörlerin dual vektör uzayında baz oluşturup oluşturmadığının incelenmesi Sınıf-içi Tartışma (20 dk.): Dual dış çarpımın ve karma çarpımın geometrik anlamlarının değerlendirilmesi ve dual vektörlerde baz kavramının reel vektör uzaylarındaki baz kavramı ile farklarının tartışılması Kısa Sınav 2 (25-30 dk.): Ders sonunda 6. haftanın sonuna kadar derste işlenen konuları içeren bir kısa sınavın yapılması	1. Vektörel çarpım, karma çarpım ve baz kavramlarına ilişkin ön bilgilerin hatırlanması ve etkinleştirilmesi. Kaynak: [4], 70-80; 246-250. 2. D-modül üzerinde dış çarpım, vektörel çarpım, karma çarpım ve dual vektörlerde baz kavramı konularını içeren bölümlerin okunması. Kaynaklar: Ders Kitabı, 187-197. [1], 42-45; 46-50. 3. Kısa Sınav 2: (6. haftanın sonuna kadar olan tüm konular) Kaynaklar: Ders Kitabı, 24-54; 122-131, 146; 167-175. [1], 1-10; 14-17; 25-41.
8	Ara Sınav 1	Sınav haftasına kadar işlenen konuların tümünün tekrar edilmesi
9	Konu Anlatımı: D-modülde dual izometrilere; dual matrisler Sınıf-içi Uygulama (30 dk.): Verilen bir dönüşümün dual izometri olup olmadığının gösterilmesi, Verilen dual matrisler için temel cebirsel işlemlerin hesaplanması, bazı özel dual matris örnekleri	1. İzometri ve matrisler kavramlarına ilişkin ön bilgilerin hatırlanması ve etkinleştirilmesi. Kaynak: [4], 58-117; 151-158. 2. D-modülde dual izometrilere, dual matrisler



	Sınıf-içi Tartışma (20 dk.): Ortogonal dual matrislerin geometrik yorumu, D-modüldeki birim kürenin dual dönmelerin 3-boyutlu Öklid uzayındaki karşılığının araştırılması	konularını içeren bölümlerin okunması. Kaynaklar: Ders Kitabı, 197. [1], 50-55. [3], 268-354.
10	Konu Anlatımı: Dual değişkenli fonksiyonların seriye açılımı; dual integral Sınıf-içi Uygulama (30 dk.): Verilen dual değişkenli fonksiyonların seriye açılarak dual karşılıklarının hesaplanması, verilen bir dual fonksiyonun integralinin hesaplanması Sınıf-içi Tartışma (10 dk.): Dual değişkenli fonksiyonların seriye açılmasında fonksiyonun türevlenebilirliğinin etkisinin tartışılması Kısa Sınav 3 (25-30 dk.): Ders sonunda 9. hafta derste işlenen konuları içeren bir kısa sınavın yapılması	1. Kompleks değişkenli fonksiyon kavramlarına ilişkin ön bilgilerin hatırlanması ve etkinleştirilmesi. Kaynak: Ders Kitabı, 39-56. 2. Dual değişkenli fonksiyonların seriye açılımı ve dual integral konularını içeren bölümlerin okunması. Kaynaklar: Ders Kitabı, 143-145. [1], 64-77. 3. Kısa Sınav 3: (D-modülde dual izometrilere, dual matrisler) Kaynaklar: Ders Kitabı, 197. [1], 50-55. [3], 268-354.
11	Konu Anlatımı: Reel kuaterniyonlar cebiri ve reel kuaterniyonlar üzerinde temel işlemler Sınıf-içi Uygulama (30 dk.): Verilen reel kuaterniyonların toplamalarının, skaler çarpımlarının hesaplanması, bir kuaterniyonun eşleniğinin bulunması, normunun ve tersinin hesaplanması Sınıf-içi Tartışma (15 dk.): Kuaterniyonların cebirsel yapısının ele alınması, 3B bilgisayar grafiklerinde ve oyun motorlarında kullanımının irdelenmesi	1. Cebir kavramına ilişkin ön bilgilerin hatırlanması ve etkinleştirilmesi. Kaynak: [4], 161-167. 2. Reel kuaterniyonlar cebiri ve reel kuaterniyonlar üzerinde temel işlemler konularını içeren bölümlerin okunması. Kaynaklar: Ders Kitabı, 312-317. [1], 78-88.
12	Konu Anlatımı: İki vektörün kuaterniyon çarpımı; reel kuaterniyonların matris gösterimi Sınıf-içi Uygulama (30 dk.): Verilen iki vektörün pure kuaterniyon olarak yazılması, kuaterniyon çarpımının hesaplanması ve vektörel skaler kısmı ile vektörel kısmının yorumlanması, ardından bir kuaterniyonun 4×4 reel matris temsilinin bulunması Sınıf-içi Tartışma (10 dk.): Birim kuaterniyonların geometrik yorumu, reel kuaterniyonların kompleks matris temsilinin varlığının araştırılması	1. Vektörel çarpımın ve lineer dönüşümün matris gösterimi kavramlarına ilişkin ön bilgilerin hatırlanması ve etkinleştirilmesi. Kaynak: [4], 246; 178-184. 2. İki vektörün kuaterniyon çarpımı ve reel kuaterniyonların matris gösterimi konularını içeren bölümlerin okunması. Kaynaklar: Ders Kitabı, 315; 330-333. [1], 88-93.
13	Konu Anlatımı: Simplektik geometri Sınıf-içi Uygulama (30 dk.): Sıralı n-li reel kuaterniyonların kümesi için verilen vektörlerin Simplektik çarpımının hesaplanması ve sağladığı özelliklerin gösterilmesi Sınıf-içi Tartışma (10 dk.): Simplektik geometride sıralı n-li reel kuaterniyonların kümesi matris temsili olup olamayacağının tartışılması	1. İç çarpım uzayı kavramına ilişkin ön bilgilerin hatırlanması ve etkinleştirilmesi. Kaynak: [4], 46-52. 2. Simplektik geometri konusunu içeren bölümlerin okunması. Kaynaklar: Ders Kitabı, 328. [1], 94-103.
14	Konu Anlatımı: Dual kuaterniyonlar ve dual kuaterniyonlar üzerinde temel işlemler Sınıf-içi Uygulama (30 dk.): Verilen dual kuaterniyonlar temel cebirsel işlemlerin hesaplanarak sağladığı özelliklerin gösterilmesi (toplama, skaler ile çarpma, kuaterniyon çarpımı, eşlenik, norm) Sınıf-içi Tartışma (15 dk.): Katsayıları reel sayılar olan reel kuaterniyonlar yerine katsayıları dual sayılar olan dual sayı katsayılı kuaterniyonların varlığının olup olamayacağının ve geometrik yapısının tartışılması	1. Reel kuaterniyonlar kavramına ilişkin ön bilgilerin hatırlanması ve etkinleştirilmesi. Kaynak: Ders Kitabı, 312-333. 2. Dual kuaterniyonlar ve dual kuaterniyonlar üzerinde temel işlemler konularını içeren bölümlerin okunması. Kaynak: Ders Kitabı, 372-386.
15	Konu Anlatımı: Farklı kuaterniyonlar ve sayılar sistemlerini inceleme Sınıf-içi Uygulama (30 dk.): Farklı kuaterniyonlar ve sayılar sistemlerine dair çeşitli temel cebirsel yapılarına dair örnekler	1. Reel kuaterniyonlar kavramına ilişkin ön bilgilerin hatırlanması ve etkinleştirilmesi. Kaynak: Ders Kitabı, 312-333; 372-376.



	Sınıf-İçi Tartışma (20 dk.): Farklı yapılarıdaki 2 ve 4 boyutlu sayı sistemlerinin karşılaştırılması, her zaman için 2 boyutlu sistemlerden 4 boyutlu sayı sistemlerinin tanımlanıp tanımlanamayacağını tartışılması Kısa Sınav 4 (25-30 dk.): Ters yüz edilmiş öğrenme (flipped learning) yöntemi çerçevesinde, ders başında, öğrenciye verilen ön hazırlık görevinde yer alan konuları içeren bir kısa sınavın yapılması	2. Farklı kuaterniyonlar ve sayılar sistemlerini içeren bölümlerin okunması. Kaynak: Ders Kitabı, 72–75; 218–222; 385–404. 3. Kısa Sınav 4: (farklı kuaterniyonlar ve sayılar sistemleri) Kaynak: Ders Kitabı, 72–75; 218–222; 385–404.
16	Final	İşlenen konuların tümünün tekrar edilmesi

AKTS İŞYÜKÜ TABLOSU

Etkinlikler	Sayı	Süresi (Saat)	Toplam İşyükü
Ders Saati	14	3	42
Laboratuvar			
Uygulama			
Arazi Çalışması			
Sınıf Dışı Ders Çalışması	14	3	42
Derse Özgü Staj			
Ödev			
Küçük Sınavlar/Stüdyo Kritiği	4	3	12
Projeler			
Sunum / Seminer			
Ara Sınavlar (Sınav Süresi + Sınav Hazırlık Süresi)	1	25	25
Final (Sınav Süresi + Sınav Hazırlık Süresi)	1	35	35
Toplam İş yükü:			156
Toplam İş yükü / 30(s):			5.2
AKTS Kredisi:			5



COURSE INFORMATION FORM

FACULTY / GRADUATE SCHOOL	Faculty of Arts and Sciences
DEPARTMENT / PROGRAMME	Mathematics
TITLE OF COURSE	Dual Numbers and Quaternion Theory
CODE	MAT4450
LOCAL CREDIT	3
ECTS	5
LECTURE HOUR / WEEK	3
PRACTICAL HOUR / WEEK	0
LABORATORY HOUR / WEEK	0
PREREQUISITE	None
SEMESTER	Fall, Spring
COURSE LANGUAGE	English, Turkish
LEVEL OF COURSE	First Cycle
COURSE TYPE	Elective @ Bachelor Programme in Mathematics
COURSE CATEGORY	Core Courses
MODE OF DELIVERY	Face-to-Face
OWNER ACADEMIC UNIT	Department of Mathematics
COURSE COORDINATOR	Salim YÜCE
ASSISTANT(S)	
COURSE OBJECTIVES	This course aims to help students develop an understanding of fundamental linear algebra concepts, complex numbers, dual numbers, matrix representations of dual numbers, and the dual vector space; present the concepts of the dual plane, absolute value, triangle inequality, and conjugate, as well as the basic definitions and theorems related to dual numbers; examine the inner product, norm, exterior product, vector product, mixed product, and basis concepts in dual vector spaces in D-modules; and examine topics such as the E-Study transformation, dual angle, dual isometries, and dual matrices in D-modules. In addition, the course includes the series expansion of dual-variable functions and the computation of dual integrals, the algebra of real quaternions, fundamental operations on real quaternions, the quaternion product of two vectors, and the matrix representation of real quaternions. Furthermore, it introduces symplectic geometry and investigates the basic operations on dual quaternions. The course aims to equip students with the ability to understand the abstract concepts specific to dual numbers and quaternions, and to interpret these concepts from both geometric and analytical perspectives.
COURSE CONTENT	Fundamental linear algebra concepts, complex numbers; dual numbers, the system of dual numbers, matrix representation of dual numbers, dual vector space, basic definitions and theorems related to dual numbers (dual plane, absolute value, triangle inequality, conjugate); D-modules, inner product and norm on D-modules, E.Study transformation and dual angle, exterior product, vector product, mixed product, and the concepts of basis in dual vector spaces, dual isometries on D-modules; dual matrices; series expansion of dual-variable functions, dual integrals; algebra of real quaternions, fundamental operations on real quaternions, quaternion product of two vectors, matrix representation of real quaternions; symplectic geometry; dual quaternions and fundamental operations on dual quaternions.

**Coursebook:**

Yüce, Salim. *Sayılar ve Geometri*. 1st ed., Pegem Akademi Publishing, 2020.

Required Readings:

[1] Hacısalıhoğlu, H. Hilmi. *Hareket Geometrisi ve Kuaterniyonlar Teorisi*. 1st ed., Gazi University Publications of the Faculty of Arts and Sciences, 1983.

[2] Müller, Hans Robert. *Kinematik Dersleri*. Ankara University Faculty of Arts and Sciences, Um. 96-Mat No:2, 1963.

[3] Yüce, Salim. *Sayılar ve Matrisler Teorisi*. 1st ed., Pegem Akademi Publishing, 2023.

[4] Yüce, Salim. *Lineer Cebir*. 8th ed., Pegem Akademi Publishing, 2025.

Recommended Readings:

Blaschke, William, Müller, Hans Robert. *Ebene Kinematik*. Oldenbourg, München, 1956.

Hacısalıhoğlu, H. Hilmi. *Lineer Cebir*. 8th ed., Ankara University, 2000.

Müller, Hans Robert. *Sphärische Kinematik*. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1962.

Course Learning Outcomes

Upon successful completion of the course, students will be able to

1. Explain the definitions of complex numbers, and dual numbers; matrix representations of dual numbers and the dual vector space.
2. Express the concepts of dual plane, absolute value, triangle inequality, conjugate; fundamental theorems related to dual numbers, the structure of D-modules; inner product, norm, exterior product, vector product, mixed product, and the concept of basis in dual vector spaces.
3. Explain the E-Study transformation and dual angle; dual isometries and dual matrices in D-modules.
4. Compute the series expansion of dual-variable functions and dual integrals.
5. Examine the algebra of real quaternions, including addition and multiplication of quaternions, finding the conjugate, and matrix representations.
6. Explain the concept of symplectic geometry; fundamental operations on dual quaternions.
7. Interpret the abstract concepts specific to dual numbers, quaternions, and dual quaternions from both geometric and analytic perspectives.

EVALUATION SYSTEM

Activities	Number	Percentage of Grade
Attendance/Participation		
Laboratory		
Application		
Field Work		
Special Course Internship (Work Placement)		
Quizzes/Studio Critics (Required): • Content: Comprehensive questions covering all topics addressed up to the exam week • Format: Face-to-face multiple-choice quiz (5-10 minutes) • Detailed Assessment Criteria: -Demonstration of understanding of the fundamental concepts of the course -Ability to solve problems on theoretical topics covered in the course	4	%20



Homework Assignments		
Presentations/Jury		
Project		
Seminar/Workshop		
Midterms (Required): Content: Comprehensive questions covering all topics addressed up to the exam week Format: Face-to-face written exam. (90 minutes). Detailed Assessment Criteria: -Demonstration of understanding of the fundamental concepts of the course -Ability to solve problems on theoretical topics covered in the course -Carrying out theoretical reasoning processes	1	%40
Final (Required): Content: Comprehensive questions covering the entire content of the course Format: Face-to-face written exam. (90 minutes). Detailed Assessment Criteria: -Demonstration of in-depth understanding of all topics covered in the course -Ability to apply advanced problem-solving skills	1	%40
Percentage of In-Term Studies		%60
Percentage of Final Examination		%40
TOTAL		%100

WEEKLY SUBJECTS AND RELATED PREPARATION STUDIES

WEEKS	COURSE OUTLINE	Related Preparation
1	Lecture: Fundamental concepts of linear algebra; complex numbers In-Class Practice (30 minutes): Addition and multiplication of given complex numbers, finding their conjugates, performing division, computing inner products and norms, and examining their algebraic structure In-class Discussion (5 minutes): Investigating the importance of using complex numbers in mathematical problems that cannot be explained by real numbers; examining the relationship between the real plane and the system of complex numbers; exploring whether complex numbers form a field	- Recollection and activation of prior knowledge on the concepts of the group, ring, field, vector space, and subspace. Source: [4], 2–9; 14–41. - Reading the sections covering complex numbers. Source: Coursebook, 24–54.
2	Lecture: Dual numbers and the dual number system In-Class Practice (30 minutes): Addition, multiplication, and division of given dual numbers; computation of their norms, and examination of their algebraic structure In-class Discussion (15 minutes): Comparison of the fundamental operations of dual numbers with complex	- Recollection and activation of prior knowledge on the concepts of the complex numbers and the complex number system. Source: Coursebook, 24–54. - Reading the sections covering dual numbers and the dual number system. Sources: Coursebook, 122–128. [1], 1–10.



	numbers; discussion on whether the set of dual numbers constitutes a field	
3	Lecture: Matrix representation of dual numbers; the dual vector space In-Class Practice (30 minutes): Writing the matrix representation of two given dual numbers and comparing the product of these matrices with the product of the dual numbers; various applications on dual vectors In-class Discussion (15 minutes): Evaluating the differences between the dual vector space and real vector space; examining the advantages of using the matrix representation of dual numbers in applications Quiz 1 (25–30 minutes): At the end of the session, a short quiz will be administered covering the topics studied up to the end of week 2	1. Recollection and activation of prior knowledge on the concepts of the matrix representation of complex numbers. Source: Coursebook, 33–35. 2. Reading the sections covering the matrix representation of dual numbers and the dual vector space. Sources: Coursebook, 129–131. [1], 11–14; 18–21. 3. Quiz 1: (all topics up to the end of week 2) Sources: Coursebook, 24-54; 122- 128. [1], 1–10.
4	Lecture: Fundamental definitions and theorems related to dual numbers (dual plane, absolute value, triangle inequality, conjugate) In-Class Practice (30 minutes): Finding the absolute values, norms, and conjugates of given dual numbers; demonstrating the validity of the triangle inequality In-class Discussion (15 minutes): Discussing the similarities and differences between dual conjugates and real/complex conjugates; examining the structure of the dual plane	1. Recollection and activation of prior knowledge on the concepts of the plane, absolute value, triangle inequality, and conjugate for complex numbers. Source: Coursebook, 24–55. 2. Reading the sections covering the fundamental definitions and theorems related to dual numbers. Sources: Coursebook, 126–129; 146. [1], 14-17.
5	Lecture: D-module, inner product and norm on D-module In-Class Practice (30 minutes): Computing the inner product and the norm of given dual vectors In-class Discussion (15 minutes): Students investigate whether the dual parts of vectors affect the norm when calculating the inner product and norm of given dual vectors	1. Recollection and activation of prior knowledge on the concepts of the inner product and norm in the vector spaces. Source: [4], 46–56. 2. Reading the sections covering D-module and the definitions of inner product and norm on D-module. Sources: Coursebook, 167–172. [1], 25–28.
6	Lecture: E-Study transformation; dual angle In-Class Practice (30 minutes): Calculating the trigonometric expansions of a given dual angle Θ for $\cos(\Theta)$ and $\sin(\Theta)$, and demonstrating that the real part represents rotation while the dual part represents translation In-class Discussion (10 minutes): Examining how the E-Study transformation simplifies the rotation–translation relationship in robotics, computer graphics, or kinematics; discussing the advantages of dual angles representing both rotation and translation together in engineering and robotics	1. Recollection and activation of prior knowledge on the concepts of linear transformations and the angle between the vectors. Source: [4], 50–51; 140–158. 2. Reading the sections covering E-Study transformation and dual angle. Sources: Coursebook, 172–175. [1], 29–41.
7	Lecture: Exterior product, vector product, mixed product on D-module; the concept of basis in dual vector spaces In-Class Practice (30 minutes): Computing the exterior product of given dual vectors; finding the mixed product of three dual vectors; examining whether the given vectors form a basis in the dual vector space In-class Discussion (20 minutes): Analyzing the	1. Recollection and activation of prior knowledge on the concepts of vector product, scalar triple product, and basis. Source: [4], 70–80; 246–250. 2. Reading the sections covering the exterior product, vector product, mixed product on D-modules, and the concept of basis in dual vector spaces. Sources: Coursebook, 187–197. [1], 42–45; 46–50. 3. Quiz 2: (all topics up to the end of week 6) Sources: Coursebook, 24-54; 122-131, 146; 167-175. [1], 1-10; 14-17; 25-41.



	geometric meaning of the dual exterior product and the mixed product; discussing the differences between the concept of basis in dual vector space and the concept of basis in real vector spaces Quiz 2 (25-30 minutes): At the end of the session, a short quiz will be administered covering the topics studied up to the end of week 6	
8	Midterm 1	Review of all topics covered up to the exam week.
9	Lecture: Dual isometries; dual matrices In-Class Practice (30 minutes): Demonstrating whether a given transformation is a dual isometry; performing basic algebraic operations for given dual matrices; exploring some special examples of dual matrices In-class Discussion (20 minutes): Geometric interpretation of orthogonal dual matrices; investigating the correspondence of the unit sphere in a D-module to dual rotations in three-dimensional Euclidean space	1. Recollection and activation of prior knowledge on the concepts of isometry and matrices. Source: [4], 58–117; 151–158. 2. Reading the sections covering dual isometries and dual matrices. Sources: Coursebook, 197. [1], 50–55. [3], 268–354.
10	Lecture: Series expansion of dual-variable functions; dual integrals In-Class Practice (30 minutes): Expanding given dual-variable functions into series and calculating their dual counterparts; computing the integral of a given dual function In-class Discussion (10 minutes): Discussing the effect of differentiability of a function on the series expansion of dual-variable functions Quiz 3 (25-30 min): At the end of the session, a short quiz will be administered covering the topics studied in week 9	1. Recollection and activation of prior knowledge on the concepts of the complex-valued functions. Source: Coursebook, 39–56. 2. Reading the sections covering dual-variable functions and dual integrals. Sources: Coursebook, 143–145. [1], 64–77. 3. Quiz 3: (dual isometries and dual matrices) Sources: Coursebook, 197. [1], 50–55. [3], 268–354.
11	Lecture: Algebra of real quaternions and fundamental operations on real quaternions In-Class Practice (30 minutes): Computing the sums and scalar products of given real quaternions; finding the conjugate of a quaternion; calculating its norm and inverse In-class Discussion (15 minutes): Examining the algebraic structure of quaternions; investigating their applications in 3D computer graphics and game engines	1. Recollection and activation of prior knowledge on the concept of the algebra. Source: [4], 161–167. 2. Reading the sections covering the algebra of real quaternions and fundamental operations on real quaternions. Sources: Coursebook, 312–317. [1], 78–88.
12	Lecture: Quaternion product of two vectors; matrix representation of real quaternions In-Class Practice (30 minutes): Writing two given vectors as pure quaternions; computing their quaternion product and interpreting its scalar and vector parts; then finding the 4×4 real matrix representation of a quaternion. In-class Discussion (10 minutes): Geometric interpretation of unit quaternions; investigating the existence of complex matrix representations of real quaternions	1. Recollection and activation of prior knowledge on the concepts of the matrix representation of vector product and linear transformation. Source: [4], 246; 178–184. 2. Reading the sections covering the quaternion product of two vectors and the matrix representation of real quaternions. Source: Coursebook, 315; 330–333. [1], 88–93.
13	Lecture: Symplectic geometry	1. Recollection and activation of prior knowledge on the concept of inner product space.



	In-Class Practice (30 minutes): Computing the symplectic product of given vectors in the set of ordered n-tuples of real quaternions and demonstrating its properties In-class Discussion (10 minutes): Discussing whether the set of ordered n-tuples of real quaternions in symplectic geometry can have a matrix representation	Source: [4], 46–52. 2. Reading the sections covering symplectic geometry. Sources: Coursebook, 328. [1], 94–103.
14	Lecture: Dual quaternions and fundamental operations on dual quaternions In-Class Practice (30 minutes): Performing basic algebraic operations on given dual quaternions (addition, scalar multiplication, quaternion product, conjugation, norm) and demonstrating their properties In-class Discussion (15 minutes): Discussing the existence and geometric structure of quaternions with dual number coefficients (i.e., dual-number-based quaternions) in place of real-number coefficients	1. Recollection and activation of prior knowledge on the concept of real quaternions. Source: Coursebook, 312–333. 2. Reading the sections covering dual quaternions and fundamental operations on dual quaternions. Source: Coursebook, 372–386.
15	Lecture: Exploring different quaternion and number systems In-Class Practice (30 minutes): Working on examples of the basic algebraic structures of various quaternion and number systems In-class Discussion (20 minutes): Comparing two- and four-dimensional number systems in different structures; discussing whether four-dimensional number systems can always be defined from two-dimensional systems Quiz 4 (25-30 minutes): A short quiz at the beginning of the lesson, covering topics assigned as pre-class preparation within the flipped learning framework	1. Recollection and activation of prior knowledge on the study of the real and dual quaternions. Source: Coursebook, 312-333; 372-376. 2. Reading the sections covering the different quaternions and number systems. Source: Coursebook, 72–75; 218–222; 385–404. 3. Quiz 4: (exploring different quaternion and number systems) Source: Coursebook, 72–75; 218–222; 385–404.
16	Final	Review of all topics covered.

ECTS WORKLOAD TABLE

Activities	Number	Duration (Hour)	Total Workload
Course Hours	14	3	42
Laboratory			
Application			
Field Work			
Study Hours Out of Class	14	3	42
Special Course Internship (Work Placement)			
Homework Assignments			
Quizzes/Studio Critics	4	3	12
Project			
Presentations / Seminar			
Mid-Terms (Examination Duration + Examination Prep. Duration)	1	25	25



Final (Examination Duration + Examination Prep. Duration)	1	35	35
Total Workload:			156
Total Workload / 30(h):			5.2
ECTS Credit:			5



Ders Öğrenim Çıktısı & Program Çıktısı Matrisi

	DÖC-1	DÖC-2	DÖC-3	DÖC-4	DÖC-5	DÖC-6	DÖC-7
PC-1 Geometri, analiz, lineer cebir, soyut matematik, cebir ve diferansiyel denklemler gibi matematiğin temel alanlarındaki tanımları ve teoremleri ifade edebilecek, bunlar arasında ilişki kurabilecek ve teoremlerin uygulamalarını açıklayabileceklerdir. / State the definitions and theorems in fundamental areas of mathematics such as geometry, analysis, linear algebra, abstract mathematics, and differential equations, establish connections between them and explain their applications.	<u>5</u>	<u>4</u>	<u>5</u>	<u>5</u>	<u>5</u>	<u>5</u>	<u>5</u>
PC-2 Matematik alanındaki teorik ve uygulamalı bilgilerini ve matematiksel düşünme becerilerini kullanarak standart ve karmaşık matematiksel problemleri tanımlayabilecek ve analitik ve/veya sayısal yöntemlerle çözebilecek ve matematiksel bir önermenin geçerliliğini farklı ispat yöntemleri ile ispatlayabileceklerdir. / Identify standard and complex mathematical problems, solve these problems with analytical and/or numerical methods and prove the validity of a mathematical proposition through various proof techniques using their theoretical and applied knowledge of mathematics and mathematical thinking skills.	<u>4</u>	<u>3</u>	<u>4</u>	<u>4</u>	<u>4</u>	<u>4</u>	<u>4</u>
PC-3 Matematik alanındaki teorik ve uygulamalı bilgilerini ve matematiksel düşünme becerilerini kullanarak gerçek hayattaki problemlerin matematiksel modellerini geliştirebilecek ve bu modelleri kullanarak problemlere geçerli çözümler üretebileceklerdir. / Develop mathematical models for real-life problems and generate valid solutions based on these models using their theoretical and applied knowledge of mathematics and mathematical thinking skills.	<u>5</u>	<u>4</u>	<u>4</u>	<u>4</u>	<u>4</u>	<u>5</u>	<u>5</u>
PC-4 Disiplinlerarası bir	<u>5</u>	<u>3</u>	<u>3</u>	<u>3</u>	<u>3</u>	<u>4</u>	<u>5</u>



yaklaşım, farklı alanlarda edinmiş oldukları bilgileri sentezleyebileceklerdir. / Synthesise knowledge acquired from different disciplines through an interdisciplinary approach.							
PC-5 Matematik alanında edindikleri bilgi birikimlerini ve matematiksel düşünme becerilerini, teorik matematik, yazılım, finans ve yönetim matematiği, biyomatematik, veri bilimi ve finansal istatistik yöntemleri gibi disiplin-içi ve disiplinlerarası uzmanlık alanlarında geliştirebileceklerdir. / Advance their acquired knowledge in mathematics and mathematical thinking skills in both disciplinary and interdisciplinary areas of specialisation such as pure mathematics, software, financial and managerial mathematics, biomathematics, data science, and financial statistical methods.	<u>5</u>	<u>4</u>	<u>4</u>	<u>4</u>	<u>4</u>	<u>5</u>	<u>5</u>
PC-6 Matematik alanında yaygın olarak kullanılan en az bir programlama dili ile bilgisayar ve yapay zekâ teknolojilerini, problemleri çözmek, veri analizi yapmak ve simülasyonlar gerçekleştirmek için kullanabileceklerdir. / Use at least one programming language and computer and artificial intelligence technologies widely employed in mathematics for problem-solving, data analysis, and simulations.	<u>4</u>	<u>4</u>	<u>4</u>	<u>5</u>	<u>4</u>	<u>4</u>	<u>5</u>
PC-7 Matematik ve ilgili alanlardaki bilimsel ve teknolojik gelişmeleri izleyebilecek, kariyer fırsatlarını değerlendirerek kişisel ve mesleki gelişim hedeflerini belirleyebilecek ve bu hedeflere ulaşmak için hayat boyu öğrenme stratejilerini kullanabileceklerdir. / Follow scientific and technological developments in mathematics and related fields, assess career opportunities, identify personal and professional development goals, and adopt lifelong learning strategies to achieve these goals.	=	=	=	=	=	=	=
PC-8 Bilimsel araştırmalarını ve mesleki	=	=	=	=	=	=	=



faaliyetlerini yürütürken doğabilecek hukuksal sonuçları ve toplumsal etkileri dikkate alarak mesleki etik ilkeler, kalite standartları ile evrensel değerler doğrultusunda ve sosyal sorumluluk bilinci ve adalet duygusuyla hareket edebileceklerdir. / Act with a sense of social responsibility and justice and in accordance with professional ethical principles, quality standards, and universal values by taking into account potential legal and societal consequences of their scientific research and professional activities.							
PC-9 Bireysel olarak ya da takımlarda etkin biçimde çalışabileceklerdir. / Work effectively both independently and as part of a team.	<u>3</u>	<u>3</u>	<u>3</u>	<u>3</u>	<u>3</u>	<u>3</u>	<u>3</u>
PC-10 Matematik alanında güvenilir bilgi kaynaklarına ulaşarak literatür taraması yapabilecek ve akademik araştırma tasarlayıp yürütebileceklerdir. / Access reliable sources of information, conduct literature reviews, and design and carry out academic research in the field of mathematics.	=	=	=	=	=	=	=
PC-11 Matematiksel konuları, teorileri, ispatları, araştırmaları ve problem çözümlerini, matematik terminolojisi kullanarak tüm paydaşlara Türkçe ve İngilizcede sözlü ve yazılı olarak etkili biçimde aktarabileceklerdir. / Effectively communicate mathematical topics, theories, proofs, research, and problem solutions to all relevant stakeholders using appropriate mathematical terminology, both orally and in writing, in Turkish and in English.	<u>4</u>	<u>4</u>	<u>4</u>	<u>4</u>	<u>4</u>	<u>4</u>	<u>4</u>